Uravnoteženi in razcepni označeni grafi

Označeni grafi

Označeni graf je urejena dvojica (G, σ), kjer je:

- $G = (V, L)$ je graf brez zank z množico točk V in množico povezav L
- $\sigma : L \to \{p, n\}$ je ***označitvena funkcija***, ki povezavi priredi oznako. Povezave z oznako p so pozitivne (+1), tiste z oznako n pa negativne (−1). Pozitivne povezave označimo z neprekinjenimi, negativne pa s prekinjenimi črtami.

Za vsak označeni graf si lahko postavimo naslednje vprašanje:
Ali je mogoče vse točke grafa razvrstiti v dve ali več ločenih skupin, tako da bo vsaka povezava, ki povezuje poljubni točki iz iste skupine, pozitivna, medtem ko bo vsaka povezava, ki povezuje poljubni točki, ki pripadata različnima skupinama, negativna.

Če obstaja taka razvrstitev točk grafa, rečemo, da je graf ***razcepen*** (partitionable, clusterable). Še posebej pomembni pa so grafi, pri katerih je mogoče točke razvrstiti v natanko dve ločeni skupini. Taki grafi se imenujejo ***uravnoteženi*** (balanced).

Na primeru množice ljudi, ki so si sovražniki ali prijatelji, bi *uravnoteženost* pomenila, da obstajata dve skupini ljudi, ki sta taki, da so v vsaki od njih njeni člani med seboj sami prijatelji, medtem ko noben član skupine nima prijatelja v drugi skupini. Taka situacija je zelo stabilna, saj v tem primeru ne prihaja do trenj: ne more se zgoditi, da bi obstajala oseba, ki bi bila z dvema osebama, ki sta med seboj v prijateljskem odnosu, v nasprotnem odnosu (z eno osebo prijatelj, z drugo pa sovražnik).

Lastnosti uravnoteženih in razcepnih označenih grafov

Vrednost, ki jo pripišemo izbrani verigi v označenem grafu, definiramo takole:

Vrednost verige je produkt vseh oznak povezav, ki sestavljajo dano verigo.

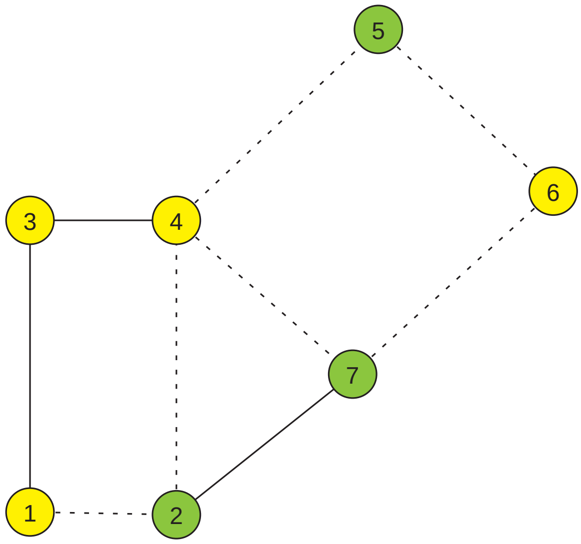
Veriga v grafu je torej pozitivna, če vsebuje sodo število negativnih povezav, sicer je negativna.

Dva izreka o uravnoteženosti označenih grafov:

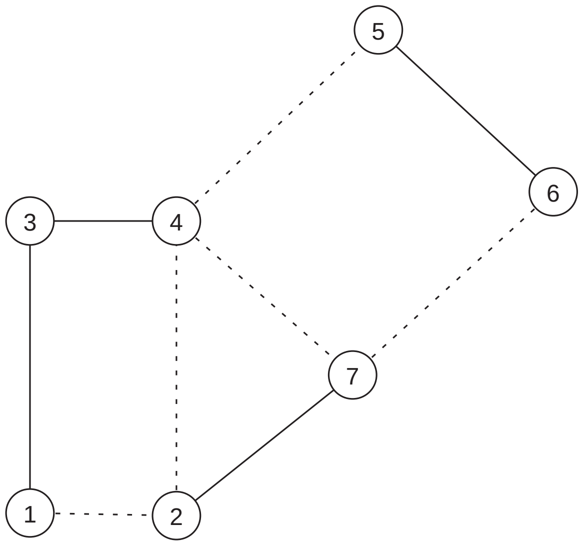
Izrek 1 *Označeni graf je* ***uravnotežen*** *natanko takrat, ko za vsak par točk v tem grafu velja, da imajo vse verige, ki ju povezujejo, enako vrednost.*

Izrek 2 *Označeni graf je* ***uravnotežen*** *natanko takrat, ko je vsaka sklenjena veriga pozitivna.*

Uravnotežen označeni graf:



Neuravnotežen označeni graf:



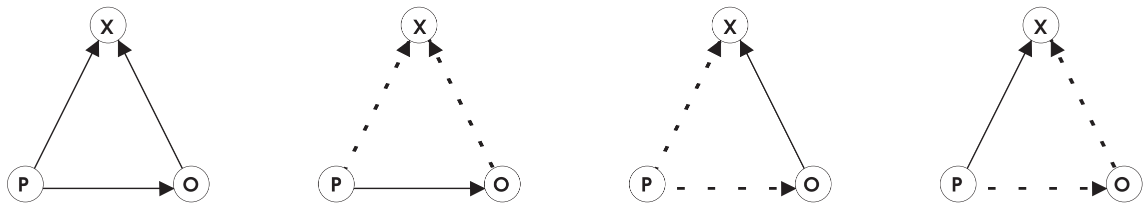
- Vzemimo skupino ljudi. Pari teh ljudi so lahko med seboj prijatelji ali sovražniki. Predpostavimo, da eden od teh ljudi spravi v obtok neko informacijo, ki ima lahko samo dve možni obliki (na primer: jutri bo lepo vreme – jutri bo slabo vreme). Predpostavimo, da bo vsak član te skupine povedal informacijo naprej vsem ljudem, s katerimi je v stiku in sicer tako, da bo svojim prijateljem povedal informacijo v taki obliki kot jo je izvedel sam, svojim sovražnikom pa v negiranem pomenu.
  Če je opazovana skupina uravnotežen sistem, bo vsak pripadnik te skupine izvedel samo eno verzijo informacije (ne glede na to od koga bo prejel informacijo), in sicer bodo vsi prijatelji osebe, ki je sprožila informacijo, izvedeli pravilno verzijo, sovražniki pa nepravilno verzijo (to je posledica *izreka 1* – vse verige med dvema točkama imajo enako vrednost). Poleg tega pa se bo k osebi, ki je sprožila informacijo, vrnila informacija v enaki obliki, kot jo je sama sprožila (posledica *izreka 2* – vse sklenjene verige so pozitivne).
- Uravnoteženost grafov, ki prikazujejo odnose med

ljudmi, lahko uporabimo tudi pri analizi literarnih del (romanov) ali televizijskih nadaljevank. Večina romanov ima tako strukturo, da se razmerja iz neke uravnotežene situacije močno zapletejo, nato pa (veliki večini primerov) srečno razpletejo. Torej, iz neke začetne uravnotežene strukture postane struktura neuravnotežena. Na osnovi analize vrednosti vseh možnih poti med dvema osebama pa lahko napovedujemo končni rezultat: če je večina poti pozitivnih, lahko pričakujemo, da bosta osebi na koncu prijatelja, v nasprotnem primeru pa sovražnika.

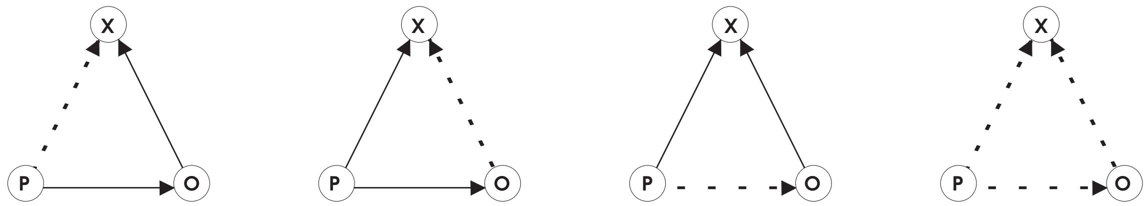
- Vojna – ponavadi med dvema skupinama.

V splošnem lahko rečemo, da za vse skupine ljudi velja, da se odnosi med pripadniki skupine s časom uravnajo tako, da postaja skupina vse bolj uravnotežen sistem.

Doslej omenjena izreka dovoljujeta samo razvrstitve točk označenega grafa v natanko dve ločeni skupini. Na naslednji sliki so predstavljeni vsi možni označeni grafi s tremi točkami (smer povezav je vnaprej določena). Pozitivne povezave so predstavljene s polnimi, negativne pa s prekinjenimi črtami. Po definicijah uravnoteženosti so zgornji štirje grafi na sliki uravnoteženi, spodnji pa neuravnoteženi. Posebno pozornost zasluži zadnji graf (graf s samimi negativnimi povezavami). Ta graf je neuravnotežen, zdi pa se smiselna delitev točk v tri skupine (vsaka točka v svoji skupini).



Štirje uravnoteženi označeni grafi



Štirje neuravnoteženi označeni grafi

Zgornje štiri slike, ki predstavljajo uravnotežene situacije, preberemo takole:

1. Prijatelj mojega prijatelja je tudi moj prijatelj.
2. Sovražnik mojega prijatelja je moj sovražnik.
3. Prijatelj mojega sovražnika je moj sovražnik.
4. Sovražnik mojega sovražnika je moj prijatelj.

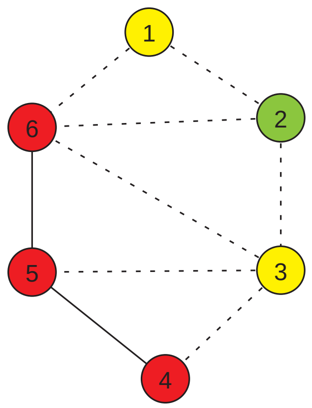
Pri prvih treh stavkih verjetno nimamo nobenih pomislekov, vprašanje pa se pojavi pri četrtem, kjer je v določenih primerih možna tudi naslednja varianta:
Sovražnik mojega sovražnika je moj sovražnik.

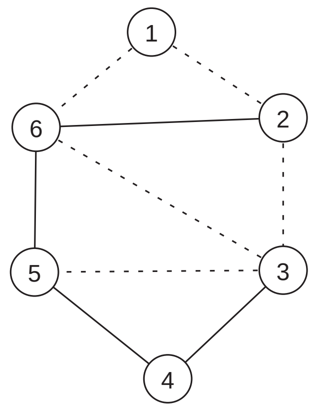
To situacijo predstavlja zadnji graf v spodnji vrstici, ki sicer ni uravnotežen, je pa razcepen v 3 skupine.

Če namesto razvrstitve v natanko dve skupini, dovolimo tudi razvrstitve v več skupin, dobi **Izrek 2** nekoliko splošnejšo obliko:

Izrek 3 *Označeni graf je* ***razcepen*** *natanko takrat, ko nima nobene sklenjene verige z natanko eno negativno povezavo.*

Razcepen in nerazcepen označeni graf:





Napaka dane razvrstitve točk označenega grafa

Dostikrat se zgodi, da graf ni razcepen. V tem primeru bomo skušali poiskati razvrstitev točk grafa, ki je najbližja idealni, to je razvrstitev, ki ima najmanjše možno število napak. Za napako bomo šteli:

- vsako negativno povezavo med točkama v okviru iste skupine (negativna napaka) in
- vsako pozitivno povezavo med točkama, ki sta v različnih skupinah (pozitivna napaka) .

Definicijo označenih grafov lahko posplošimo, tako da povezavi poleg predznaka predpišemo tudi jakost. Vrednost povezav torej ni več samo $+1$ ali -1, ampak na primer tudi $+3$, -8 itd. Čimvečja pozitivna vrednost pomeni večje prijateljstvo, čimvečja negativna vrednost pa sovraštvo. V tem primeru je treba pri računanju napake upoštevati tudi jakost povezave.

Napako dane razvrstitve izračunamo tako, da najprej posebej seštejemo vse negativne napake (seštevamo absolutne vrednosti) in nato še vse pozitivne napake. Če je povezava neusmerjena, jo moramo šteti kot usmerjeno v obeh smereh. Iz teh dveh delnih rezultatov sestavimo skupno napako z uporabo faktorja $\alpha \in [0, 1]$, ki pove katere napake so pomembnejše.

Celotna napaka je:

$$\alpha * \text{negativne napake} + (1 - \alpha) * \text{pozitivne napake}$$

Posamezne vrednosti faktorja α pomenijo:
$0 \leq \alpha < 0.5$: pozitivne napake so pomembnejše od negativnih;
$\alpha = 0.5$: pozitivne in negativne napake so enako pomembne;
$0.5 < \alpha \leq 1$: negativne napake so pomembnejše od pozitivnih.

Obrazec za izračun napake dane razvrstitve

Naj bo $\mathcal{C}$ razvrstitev točk V označenega grafa v K skupin.

Negativne povezave znotraj skupin (negativne napake):
Naj bosta i in j dve točki iz skupine C_k. $-c_{ij}$ pomeni jakost negativne povezave od točke i do točke j (če negativna povezava med tema točkama ne obstaja, je jakost povezave enaka 0). Potem je celoten prispevek skupine C_k k negativnim napakam: $\sum_{i,j \in C_k} \max(0, -c_{ij})$.

Pozitivne povezave med skupinami (pozitivne napake):
Naj bosta C_r in C_s dve različni skupini, i naj bo neka točka v skupini C_r, j pa točka v skupini C_s. c_{ij} naj pomeni jakost pozitivne povezave od točke i do točke j. Celoten prispevek skupin C_r in C_s k pozitivnim napakam je potem $\sum_{i \in C_r, j \in C_s} \max(0, c_{ij})$.

Celotno napako dane razvrstitve $\mathcal{C}$ dobimo z naslednjim izrazom:

$$P(\mathcal{C}) = \sum_k \sum_{i,j \in C_k} \max(0, -c_{ij}) +$$

$$\sum_{r \neq s} \sum_{i \in C_r, j \in C_s} \max(0, c_{ij})$$

Če je ena vrsta napak pomembnejša od druge, lahko negativne in pozitivne napake utežimo. Zato uporabimo faktor $\alpha \in [0, 1]$:

$$P(\mathcal{C}) = \alpha \sum_k \sum_{i,j \in C_k} \max(0, -c_{ij}) +$$

$$(1 - \alpha) \sum_{r \neq s} \sum_{i \in C_r, j \in C_s} \max(0, c_{ij})$$

Posamezne vrednosti faktorja α pomenijo:
$0 \leq \alpha < 0.5$ pozitivne napake so pomembnejše od negativnih;
$\alpha = 0.5$ pozitivne in negativne napake so enako pomembne;
$0.5 < \alpha \leq 1$ negativne napake so pomembnejše od pozitivnih.

Uporabnost uteževanja se pokaže v številnih praktičnih primerih. V primeru odnosov med ljudmi se velikokrat zgodi, da so prijatelji v različnih skupinah ”veliko manjše zlo” kot pa sovražniki v eni skupini. V nadaljnjih primerih bomo za α vedno vzeli vrednost 0.5.

Ugotavljanje uravnoteženosti in razcepnosti označenih grafov

Trije različni pristopi za iskanje razvrstitev:

- pregled vseh možnih razvrstitev;
- uporaba uravnoteženostnega in razcepnostnega polkolobarja;
- uporaba lokalne optimizacije.

Iskanje razvrstitev v skupine s pregledom vseh možnih razvrstitev

Najenostavnejši način iskanja razvrstitve z najmanjšim številom napak je pregled vseh možnih razvrstitev točk grafa v izbrano število skupin. Pojavi pa se problem, ker število razvrstitev z večanjem števila točk v grafu eksponentno raste in postane pregledovanje vseh razvrstitev že pri manjših grafih praktično neizvedljivo.

Če ima graf recimo 30 točk in želimo te točke razdeliti v 10 skupin, je vseh možnih razvrstitev že 173 373 343 599 189 364 594 756.

Lokalna optimizacija

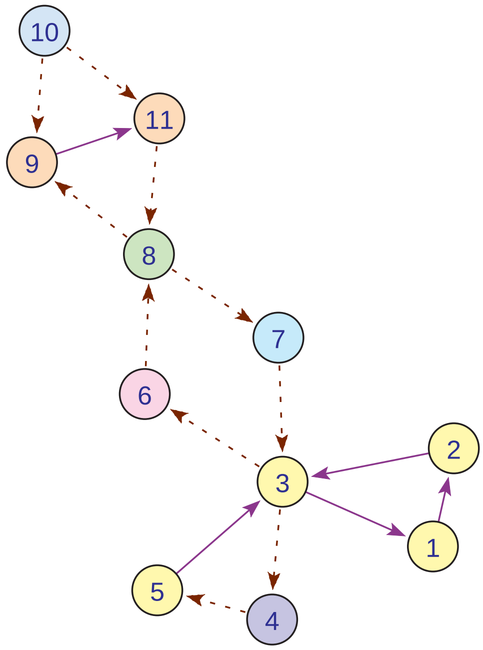
Postopek:

Točke slučajno razporedimo v željeno število skupin in izračunamo napako razvrstitve. Nato poskušamo s premikanjem točk iz ene skupine v drugo in zamenjavanjem točk med skupinami napako zmanjšati. Postopek ponavljamo toliko časa, da dane razvrstitve ne moremo več izboljšati (lokalni minimum).

Ta postopek nam ne zagotavlja, da res dobimo najboljšo rešitev. Najboljši rešitvi pa se lahko približamo ali jo celo najdemo, če postopek dovolj velikokrat ponovimo.

Primeri

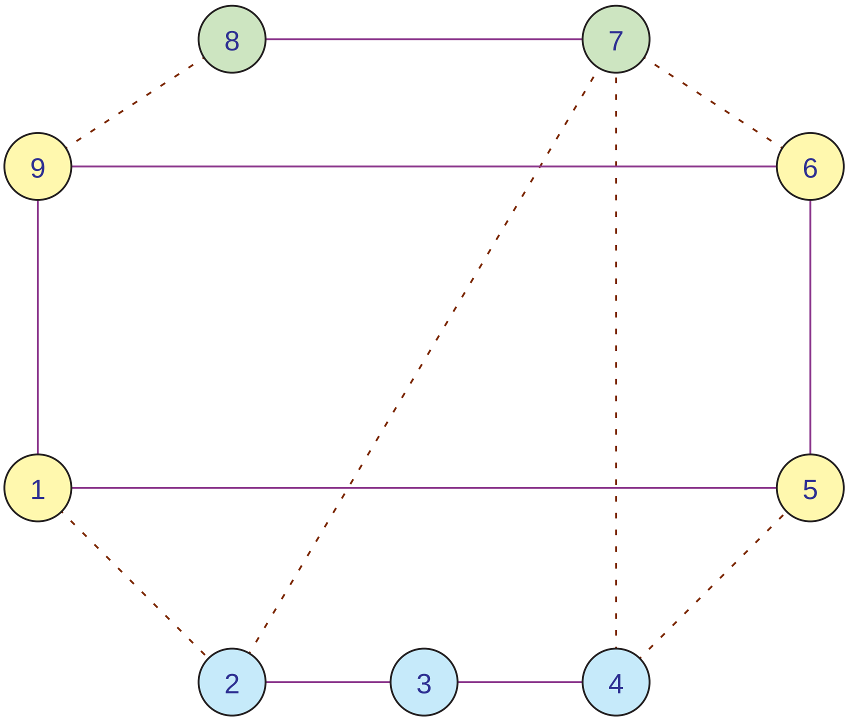
Robertsov graf – sample66.net



Graf je mogoče razcepiti v 2, 3, 4, 5, 6 in 7 skupin brez napak. Primeri teh razcepov:

2 skupini: (1, 2, 3, 5, 8, 10), (4, 6, 7, 9, 11)
3 skupine: (1, 2, 3, 5, 8), (4, 7, 9, 11), (6, 10)
4 skupine: (1, 2, 3, 5, 8), (4), (6, 7, 10), (9, 11)
5 skupin: (1, 2, 3, 5), (4), (6, 7, 10), (8), (9, 11)
6 skupin: (1, 2, 3, 5), (4), (6), (7, 10), (8), (9, 11)
7 skupin: (1, 2, 3, 5), (4), (6), (7), (8), (9, 11), (10)
Zadnji razcep je prikazan na sliki z različnimi barvami.

Chartrandov graf – sample2.net



Za Chartrandov graf razcepa v 2 skupini brez napak ni mogoče najti, lahko pa najdemo več razcepov v 2 skupini z napako 2 ($\alpha = 0.5$):

(1, 5, 7, 8), (2, 3, 4, 6, 9)
(1, 2, 3, 4, 5, 6, 9), (7, 8)
(1, 5, 6, 9), (2, 3, 4, 7, 8)
(1, 5, 6, 7, 9), (2, 3, 4, 8)
(1, 5, 6, 7, 8, 9), (2, 3, 4)

Napake dane razvrstitve je lahko odkriti, če vrstice in stolpce matrike permutiramo tako, da so točke, ki spadajo v isto skupino, sosednje. Tako permutirana matrika ima v primeru idealne razcepnosti naslednjo obliko:

- diagonalni bloki vsebujejo samo pozitivne vrednosti (ali vrednost 0);
- ostali bloki vsebujejo samo negativne vrednosti (ali 0).

Vsaka negativna vrednost v diagonalnem bloku je zato napaka, kot je napaka tudi vsaka pozitivna vrednost v nediagonalnem bloku.

Vzemimo še enkrat prvi razcep: (1, 5, 7, 8), (2, 3, 4, 6, 9) in izpišimo permutirano matriko Chartrandovega grafa za ta razcep:

	1	5	7	8	2	3	4	6	9
1	.	1	.	.	-1	.	.	.	1
5	1	.	.	.	.	.	-1	1	.
7	.	.	.	1	-1	.	-1	-1	.
8	.	.	1	.	.	.	.	.	-1
2	-1	.	-1	.	.	1	.	.	.
3	.	.	.	.	1	.	1	.	.
4	.	-1	-1	.	.	1	.	.	.
6	.	1	-1	.	.	.	.	.	1
9	1	.	.	-1	.	.	.	1	.

V tabeli so ničle zaradi boljše preglednosti označene s pikami. Povezave, ki prispevajo k neuravnoteženosti so:

$1 \to 9, \quad 5 \to 6, \quad 6 \to 5, \quad 9 \to 1.$

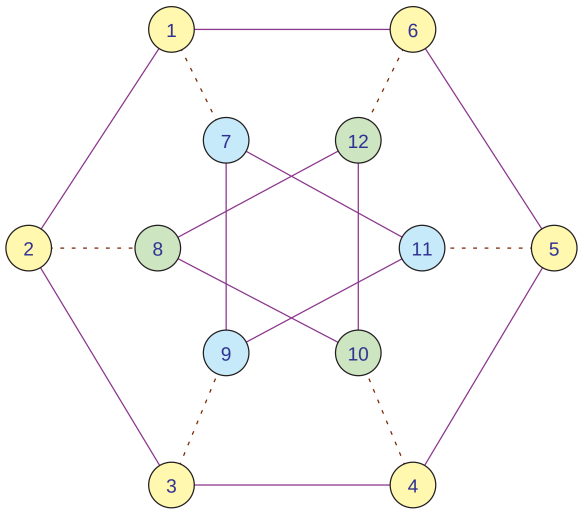
Obstaja pa razvrstitev v 3 skupine brez napak:
(1, 5, 6, 9), (2, 3, 4), (7, 8)
ki je prikazana na sliki z različnimi barvami.

Permutirana matrika Chartrandovega grafa za to razvrstitev izgleda takole:

	1	5	6	9	2	3	4	7	8
1	.	1	.	1	-1	.	.	.	.
5	1	.	1	.	.	.	-1	.	.
6	.	1	.	1	.	.	.	-1	.
9	1	.	1	.	.	.	.	.	-1
2	-1	.	.	.	.	1	.	-1	.
3	.	.	.	.	1	.	1	.	.
4	.	-1	.	.	.	1	.	-1	.
7	.	.	-1	.	-1	.	-1	.	1
8	.	.	.	-1	.	.	.	1	.

Najboljši možni razcepi v 4 skupine imajo 1 napako ($\alpha = 0.5$):

(1, 5, 6, 9), (2, 3), (4), (7, 8)
(1, 5, 6, 9), (2), (3, 4), (7, 8)
(1, 5, 6, 9), (2, 3, 4), (7), (8)
Pri razcepih tega grafa v večje število skupin je število napak precej večje.



Zgornji graf (sample9.net) ima, kar se tiče razcepov, lepe lastnosti:

graf je uravnotežen: (1, 2, 3, 4, 5, 6), (7, 8, 9, 10, 11, 12)

obstaja pa tudi optimalen razcep v 3 skupine (slika):
(1, 2, 3, 4, 5, 6), (7, 9, 11), (8, 10, 12)

Iskanje razvrstitev v Pajku

V programu je uporabljen postopek lokalne optimizacije.

Vhod v algoritem je *označeni graf* in *razbitje* v dano število skupin. Za začetno razbitje lahko vzamemo slučajno razbitje, ki ga zgeneriramo z uporabo ukaza Partition/Create Random Partition/1-Mode
Ko zahteva
Dimension of Partition vnesemo velikost omrežja – število točk, ki je v primeru, da imamo omrežje že prebrano, že pravilno nastavljeno.
Pri vprašanju
Number of Clusters pa vnesemo število skupin, v katero želimo razcepiti označeni graf (privzeta vrednost je 2).

Iskanje razvrstitev poženemo z Network/Signed Network/...
...Create Partition/Doreian-Mrvar method*
Podamo/spremenimo lahko še:

- **Number of Repetitions** (število ponovitev postopka): Čimvečje je, boljšo rešitev lahko pričakujemo, a postopek dlje traja. Pri manjših grafih je priporočljivo zahtevati kakih 1000 ponovitev. Pri prvi ponovitvi se optimizacija začne s podanim razbitjem, v naslednjih pa s slučajno zgeneriranimi razbitji.

- **Importance of negative / positive errors** – vrednost faktorja α (privzeta vrednost je 0.5).
- **Min. number of vertices in Clusters** – najmanjše dovoljeno število enot v skupinah.
- Izbira **Relaxed balance** pa ne sme biti obkljukana (posplošena uravnoteženost).

Program nam v posebnem oknu izpiše skupno napako za podano začetno razvrstitev in vse povezave, ki prispevajo k napaki. V toku optimizacije se v oknu izpisujejo morebitne izboljšave. Na koncu nam za vsako razvrstitev z minimalno dobljeno skupno napako izpiše povezave, ki tej napaki prispevajo.

Kot rezultat dobimo toliko razbitij, kolikor je razvrstitev z minimalno skupno napako.

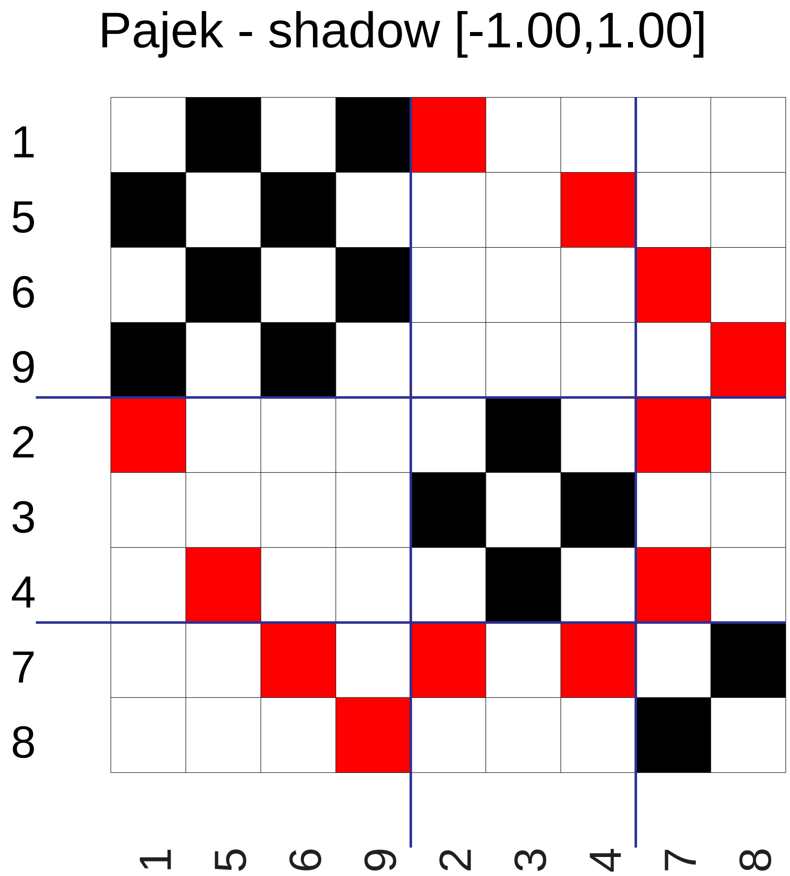
Rezultat pogledamo z Draw/Network+First Partition ali File/Partition/Edit.

Ponavadi dobimo z energijskimi risanji lepe slike označenih grafov, če proglasimo vrednosti na povezavah za podobnosti (Options/Values of Lines/Similarities). V tem primeru skuša algoritem narisati točke, ki so povezane s pozitivnimi povezavami, čimbliže skupaj, točke, ki so povezane z negativnimi povezavami, pa čimdlje narazen (primer sample2.net in razvrstitev v tri skupine).

Napake so lepo razvidne iz permutirane matrike glede na razbitje. V Pajku v ta namen najprej z ukazom Partition/Make Permutation - F3 pretvorimo dobljeno razbitje v permutacijo, nato pa izvozimo sliko v EPS:
File/ Network/ Export as Matrix to EPS/...
...Using Permutation + Partition
ali pritisnemo F4.

Nekatere nastavitve (npr. risanje rombov za negativne vrednosti) dodatno spreminjamo z
File/Network/Export as Matrix to EPS/Options

Za primer sample2.net in razvrstitev v 3 skupine, dobimo:


Pajek - shadow [-1.00,1.00]
1
5
6
9
2
3
4
7
8
1
5
6
9
2
3
4
7
8

Primer: Sampsonovi menihi

Sampson je preučeval odnose med 18 menihi v samostanu New England. Izmeril je več relacij med njimi

- prijateljstvo (affect)
- spoštovanje (esteem)
- vplivnost (influence)
- odobravanje (sanction)

Za relacijo prijateljstva imamo podatke za tri časovne točke T_2, T_3 in T_4, za ostale tri relacije pa samo v časovni točki T_4.

Sampson je relacije med menihi podal v obliki vrednostnih označenih grafov. Vsak menih je izbral 3 druge, s katerimi se najbolje razume, in jih ocenil z vrednostmi 1, 2 ali 3, kjer 3 pomeni najmočnejše, 1 pa najšibkejše prijateljstvo. Prav tako je vsak izbral 3 menihe, s katerimi se najslabše razume in jih ocenil z vrednostmi -1, -2 in -3, kjer spet -3 pomeni najmočnejše, -1 pa najšibkejše sovraštvo.

Relacija prijateljstva med menihi v času T_2:

Št.	Menih	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	JohnBosco	0	0	2	0	3	-2	-1	0	0	-3	0	0	0	1	0	0	0	0
2	Gregory	3	0	0	0	0	0	2	0	0	-1	0	0	-3	1	0	0	-2	0
3	Basil	2	3	0	-1	0	0	0	-3	-2	0	0	0	0	0	0	0	1	0
4	Peter	0	0	-2	0	3	1	-3	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	-1
5	Bonavent.	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0
6	Berthold	1	0	0	3	0	0	-3	-1	2	0	0	-2	0	0	0	0	0	0
7	Mark	0	2	0	-3	-1	-2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0
8	Victor	3	2	-3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-2	0	0	-1	0
9	Ambrose	0	0	-3	0	2	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	-1
10	Romuald	0	0	0	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0
11	Louis	0	0	-1	0	3	0	0	1	0	0	0	0	-3	2	0	0	-2	0
12	Winfrid	3	2	-1	-3	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	1	0	0	0	0
13	Amand	0	-3	0	0	2	-2	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	3
14	Hugh	3	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	1	2	-3	0	2	0	-1	0
15	Boniface	3	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	1	0	0	-1	-1
16	Albert	1	2	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-3	-2
17	Elias	0	0	3	-3	-2	0	0	0	0	0	-1	0	2	0	0	0	0	1
18	Simplic.	2	3	0	-3	0	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0

Sampson, S (1969): *Crysis in a cloister.* Unpublished doctoral dissertation. Cornell University.

Tabela prikazuje skupno napako za relacijo prijateljstva za razvrstitve v vseh treh časovnih točkah.

Št. skupin	T_2	T_3	T_4
1	48.5	48.0	47.0
2	21.5	16.0	12.5
3	17.5	11.0	10.5
4	19.0	13.5	12.5
5	20.5	16.0	15.0

Povzetek te tabele lahko opišemo v dveh točkah:

- Katerokoli število skupin izberemo, ugotovimo, da je neuravnoteženost v času T_3 manjša od tiste v času T_2 in neuravnoteženost v času T_4 manjša od neuravnoteženosti v času T_3. Zaključek: neuravnoteženost se s časom res zmanjšuje, kar pomeni večanje stabilnosti razvrstitve.
- Katerokoli časovno točko izberemo, dobimo najmanjšo neuravnoteženost pri razvrstitvi menihov v tri skupine. Torej lahko pričakujemo, da je razvrstitev menihov v tri skupine nekako najbolj naravna.

Poglejmo torej, kakšna je razvrstitev v tri skupine. Rezultat je zanimiv iz dveh vidikov:

- Razvrstitev v tri skupine je v vseh treh časovnih točkah enaka.
- Razvrstitev je kar enaka tisti, do katere je prišel Sampson na osnovi opazovanja.

Ta, morda nekoliko presenetljivi rezultat pomeni, da se skupine s časom niso spreminjale, le odnosi med skupinami so se ”kristalizirali”:

- več parov znotraj skupin je pozitivnih in več parov med skupinami je negativnih;
- negativni pari znotraj skupin in pozitivni pari med skupinami so šibkejši.

Napake dane razvrstitve je lahko odkriti, če vrstice in stolpce matrike permutiramo tako, da so točke, ki spadajo v isto skupino, sosednje. Tako permutirana matrika ima v primeru idealne razcepnosti naslednjo obliko:

- diagonalni bloki vsebujejo samo pozitivne vrednosti (ali vrednost 0);
- ostali bloki vsebujejo samo negativne vrednosti (ali 0).

Vsaka negativna vrednost v diagonalnem bloku je zato napaka, kot je napaka tudi vsaka pozitivna vrednost v nediagonalnem bloku.
Permutirana matrika v času T_2

		Young Turks							Outcasts				Loyal Opposition						
Št.	Menih	1	2	7	12	14	15	16	3	13	17	18	4	5	6	8	9	10	11
1	JohnBosco	.	.	-1	.	1	.	.	2	.	.	.	.	3	-2	.	.	-3	.
2	Gregory	3	.	2	.	1	.	.	.	-3	-2	.	.	.	.	.	.	-1	.
7	Mark	.	2	.	.	.	.	3	.	.	.	.	-3	-1	-2	1	.	.	.
12	Winfrid	3	2	.	.	1	.	.	-1	.	.	.	-3	.	.	.	.	.	-2
14	Hugh	3	.	.	2	.	2	.	.	-3	-1	.	.	.	.	-2	.	.	1
15	Boniface	3	2	.	.	1	.	.	-2	-3	-1	-1	.	.	.	.	.	.	.
16	Albert	1	2	3	.	.	.	.	.	-1	-3	-2	.	.	.	.	.	.	.
3	Basil	2	3	.	.	.	.	.	.	.	1	.	-1	.	.	-3	-2	.	.
13	Amand	.	-3	1	-1	.	.	.	.	.	.	3	.	2	-2	.	.	.	.
17	Elias	.	.	.	.	.	.	.	3	2	.	1	-3	-2	.	.	.	.	-1
18	Simplic.	2	3	1	.	.	.	-1	.	.	.	.	-3	.	-2	.	.	.	.
4	Peter	.	.	-3	.	.	.	.	-2	.	.	-1	.	3	1	.	.	2	.
5	Bonavent.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	3	.	.	.	.	.	2
6	Berthold	1	.	-3	-2	.	.	.	.	.	.	.	3	.	.	-1	2	.	.
8	Victor	3	2	.	.	-2	.	.	-3	.	-1	.	.	.	.	.	1	.	.
9	Ambrose	.	.	.	.	.	.	1	-3	.	-2	-1	.	2	.	3	.	.	.
10	Romuald	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	3	.	.	1	.	.	.
11	Louis	.	.	.	.	2	.	.	-1	-3	-2	.	.	3	.	1	.	.	.

Vaje

1. Poiščite čimboljše razvrstitve točk označenih grafov v datotekah sample66.net, sample9.net in sample2.net. Rezultate primerjajte s tistimi iz zapiskov predavanj.

2. V datotekah sam_aff2.net, sam_aff3.net in sam_aff4.net so shranjena Sampsonova omrežja za relacijo prijateljstva v časovnih točkah 2, 3 in 4. Za vsako omrežje poiščite čimboljše razvrstitve točk v 1, 2, 3, 4 in 5 skupin.

3. V datoteki stranke.net so podani odnosi med slovenskimi parlamentarnimi strankami leta 1993. Poiščite čimboljši razvrstitvi v 2 in 3 skupine.

   Kropivnik, S. and Mrvar, A. (1996): An Analysis of the Slovenian Parliamentary Political Parties Network. A. Ferligoj and A. Kramberger (Eds.): *Developments in Data Analysis. Metodološki zvezki*, **12**, Ljubljana: FDV, 209-216.